Uitwerking

Opg. 1 De Eulerformules zijn:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2} \\ y^E_{n+1} = y^E_n + \frac{1}{2}\left(0{,}5 - t_n + 2y^E_n\right) \end{cases}$$

Hieruit volgt:

$t_0 = 0$ en $y^E_0 = 1$

$t_1 = \frac{1}{2}$ en $y^E_1 = 1 + \frac{1}{2}(0{,}5 + 2) = \frac{9}{4}$

$t_2 = 1$ en $y^E_2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{2}\left(0{,}5 - 0{,}5 + \frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}$

De Eulerbenadering van $y(1)$ is dus $\frac{9}{2}$

Opg. 2 $ty' + 2y = \sin t \Rightarrow y' + \frac{2}{t}y = \frac{\sin t}{t}$ want $t>0$

Deze DV is lineair en een integrerende factor is $I(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\ln t} = e^{\ln(t^2)} = t^2$

Los dus op:

$t^2 y' + 2ty = t \sin t$ (voor $t>0$)

$\Rightarrow (t^2 y)' = t \sin t$

$\Rightarrow t^2 y = \int t \sin t \, dt = -t\cos t + \int \cos t \, dt$

part. int

$\Rightarrow t^2 y = -t\cos t + \sin t + C$ met $C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(t) = -\frac{\cos t}{t} + \frac{\sin t}{t^2} + \frac{C}{t^2}$ met $C \in \mathbb{R}$

als $t > 0$

Opg. 3 $y' = \frac{2x}{y + x^2 y} \Rightarrow y' = \frac{1}{y} \cdot \frac{2x}{1+x^2}$ Dit is een separabele DV.

Pas scheiding van variabelen toe, dan volgt:

$$y \cdot y' = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \int y \cdot y' \, dx = \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$\Rightarrow \int y \, dy = \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = \ln(1+x^2) + C_1$$ met $C_1 \in \mathbb{R}$

pas evt de subst $u = 1+x^2$ toe, dan $du = 2x\,dx$

$$\Rightarrow y^2 = 2 \ln(1+x^2) + C_2 \quad \text{met } C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{2 \ln(1+x^2) + C_2} \quad \text{met } C_2 \in \mathbb{R}$$

Verwerk de BVW $y(0) = -2$.

Dit impliceert dat we het minteken moeten kiezen en $C_2 = 4$.

Dus $y(x) = -\sqrt{2 \ln(1+x^2) + 4}$

Opg. 4 $z^4 + 1 - i\sqrt{3} = 0 \Rightarrow z^4 = -1 + i\sqrt{3}$

Schrijf $z = R(\cos\theta + i \sin\theta)$, waarbij $R = |z|$ en $\theta = \arg(z)$ en $-1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

Invullen in de vergelijking geeft:

$$\left(R(\cos\theta + i \sin\theta)\right)^4 = 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

$$\Rightarrow R^4 \left(\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)$$

$\boxed{\text{de Moivre}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} R^4 = 2 \Rightarrow R = \sqrt[4]{2} \\ 4\theta = \frac{2}{3}\pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \theta = \frac{1}{6}\pi + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$(k \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{6}\pi \text{ of } \frac{4}{6}\pi \text{ of } \frac{7}{6}\pi \text{ of } \frac{10}{6}\pi$$

De oplossingen zijn derhalve:

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) \\ z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right) \\ z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i\right) \\ z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\right) \end{cases}$$

Opg. 5 a) We moeten $y'' + 2y' + 26y = 0$ oplossen.

Subst. daartoe $y(t) = e^{Rt}$, hetgeen leidt tot

$R^2 + 2R + 26 = 0 \Rightarrow (R+1)^2 = -25 \Rightarrow R = -1 \pm 5i$

De algemene oplossing v/d homogene LDV is

dus $y(t) = C_1 e^{-t}\cos(5t) + C_2 e^{-t}\sin(5t)$

met $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) Zoek een particuliere oplossing v/d vorm

$y(t) = A\cos(4t) + B\sin(4t)$, dan

$y'(t) = -4A\sin(4t) + 4B\cos(4t)$, en

$y''(t) = -16A\cos(4t) - 16B\sin(4t)$

Invullen geeft nu:

$-16A\cos(4t) - 16B\sin(4t) - 8A\sin(4t) + 8B\cos(4t)$

$+ 26A\cos(4t) + 26B\sin(4t) = 82\cos(4t)$

$\Rightarrow (10A + 8B)\cos(4t) + (-8A + 10B)\sin(4t) = 82\cos(4t)$

Eis nu: $\begin{cases} 10A + 8B = 82 \\ -8A + 10B = 0 \Rightarrow A = \frac{5}{4}B \end{cases}$ $\Rightarrow B = 4 \Rightarrow A = 5$

Dus een particuliere oplossing v/d inhom. LDV is $y(t) = 5\cos(4t) + 4\sin(4t)$